La Cicloide

Braquistócrona

Tautócrona

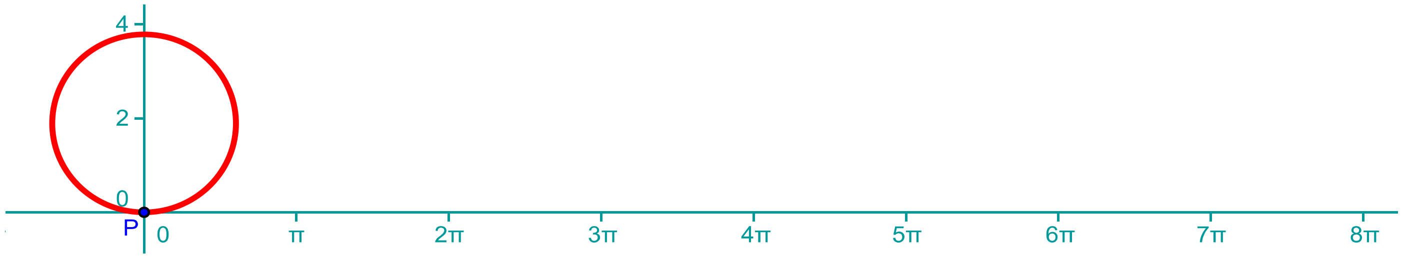
Escucho y Olvido
Veo y Recuerdo
Hago y Comprendo

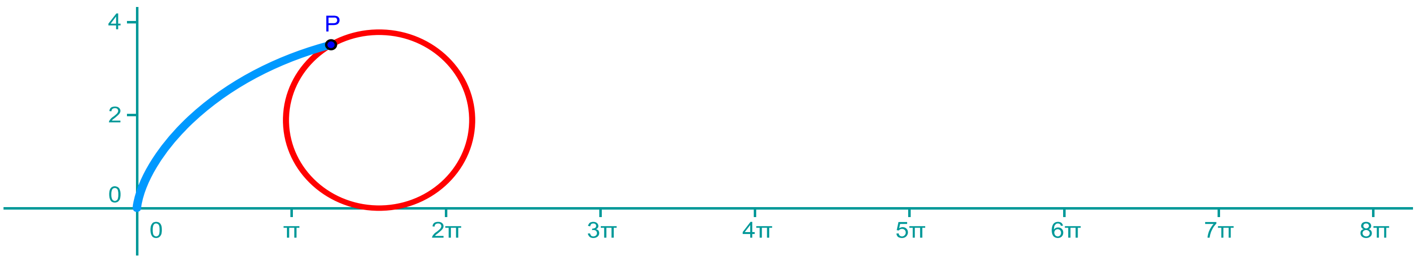
Confucio

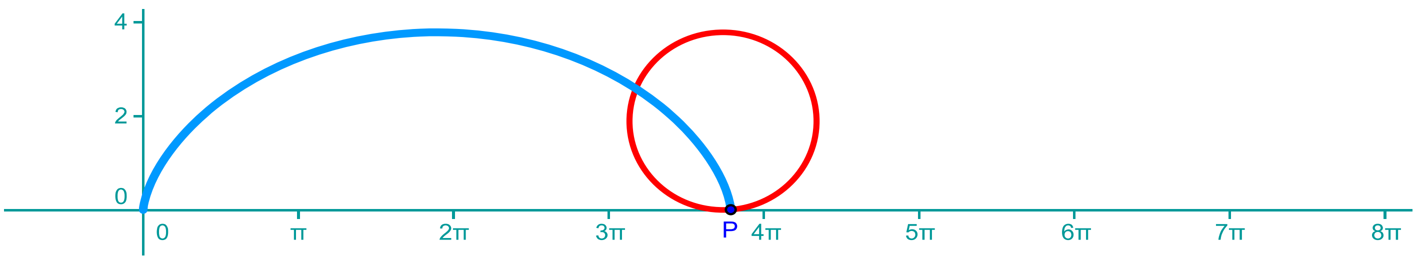
La Cicloide. Ecuaciones Paramétricas

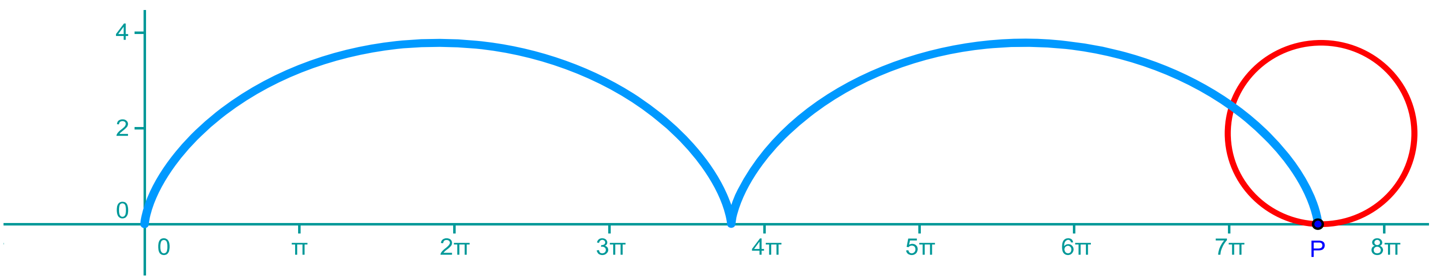
*La **Cicloide** es la curva trazada por un punto de una circunferencia cuando ésta gira sobre una línea sin deslizarse por ella. Es una curva con unas propiedades muy curiosas que al ser visualizadas chocan con nuestra imaginación.*

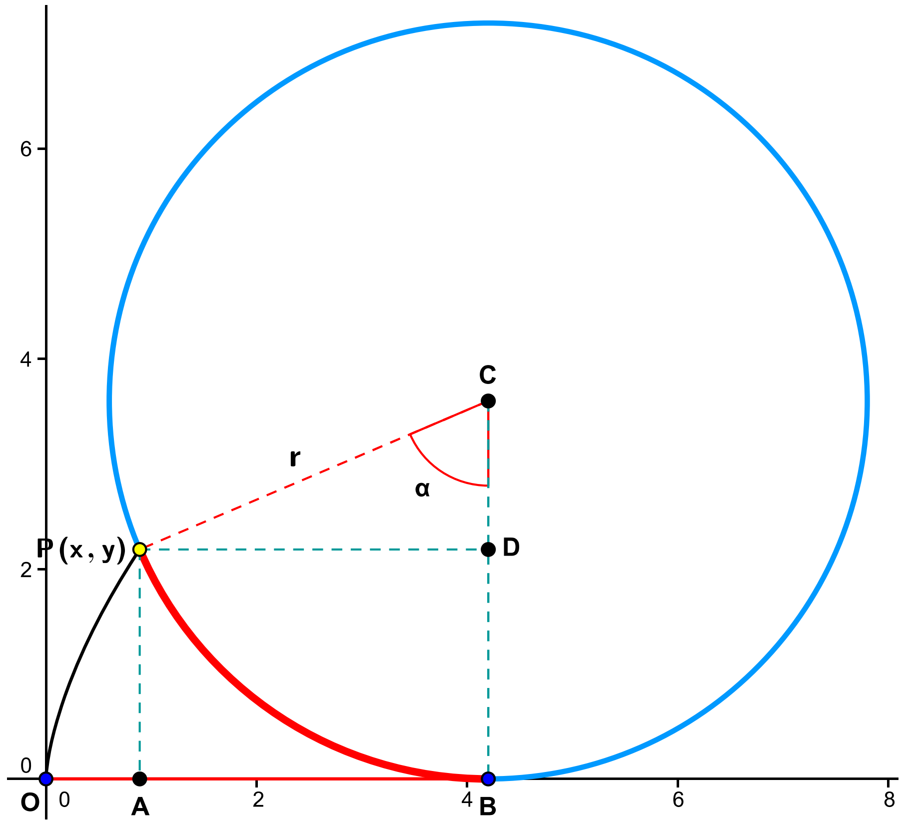
Consideremos un punto P de la circunferencia que descansa sobre el origen de coordenadas de un sistema de referencia cartesiano. Hacemos girar la circunferencia, sin deslizar, con velocidad constante hasta que el punto P alcance la posición $(2\pi\,R\,,0)$ que es cuando la circunferencia habrá dado una vuelta completa. Vamos a obtener las ecuaciones *paramétricas* de la curva que describe el punto P al girar la circunferencia.











Según la figura adjunta, para un punto cualquiera de la circunferencia $P(x,y)$ se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{x} = \overline{OA} = \overline{OB} - \overline{AB} = \overset{\frown}{PB} - \overline{PD} = r\alpha - r\,\mathrm{sen}\,\alpha = \mathbf{r(\alpha - sen\alpha)}$$

$$\mathbf{y} = \overline{PA} = \overline{CB} - \overline{CD} = r - r\cos\alpha = \mathbf{r(1 - cos\alpha)}$$

Donde $0 \le \alpha \le 2\pi$ es el ángulo comprendido entre el segmento vertical que pasa por el centro C de la circunferencia y perpendicular al eje de abscisas y el radio r.

Podemos despejar el parámetro α de la segunda ecuación anterior, sustituirlo en la primera y representar la variable “x” en función de la variable “y”, pero no sucede lo mismo con la variable “y”, ya que ésta no puede expresarse como función de la variable “x” en términos de funciones elementales.

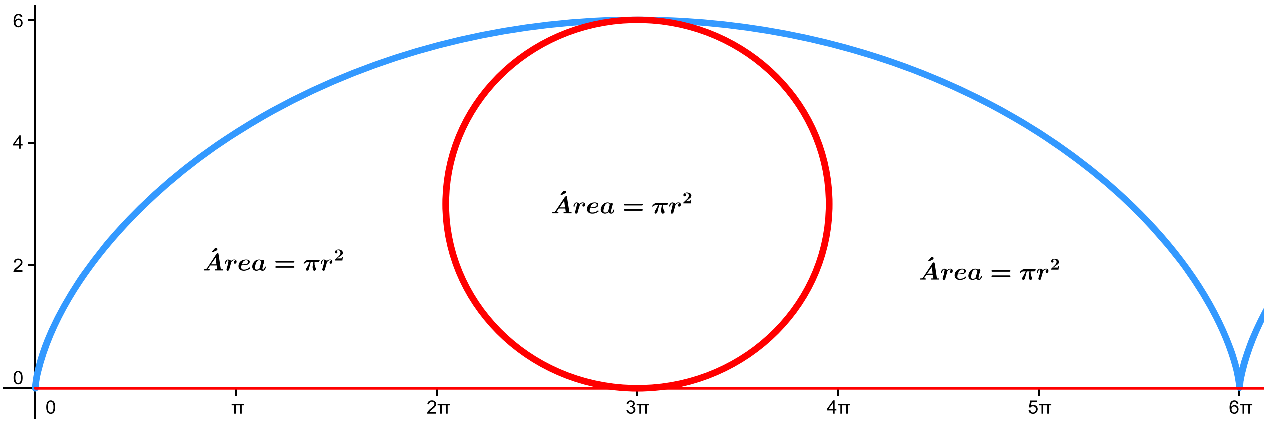
Propiedades elementales de la Cicloide

La Cicloide posee dos propiedades básicas:

1) *La longitud de un arco de la cicloide es 8 veces el radio de la circunferencia que la genera.*
2) *El área encerrada entre un arco de cicloide y el eje de abscisas es el triple de la superficie de la circunferencia generadora de la cicloide es decir* $3\pi R^2$.

El cálculo integral nos permite hoy día abordar estas dos cuestiones sin problemas.

La Cicloide fue llamada la "Helena de la Geometría", no solo por sus múltiples propiedades sino también por haber sido objeto de peleas entre muchos matemáticos.

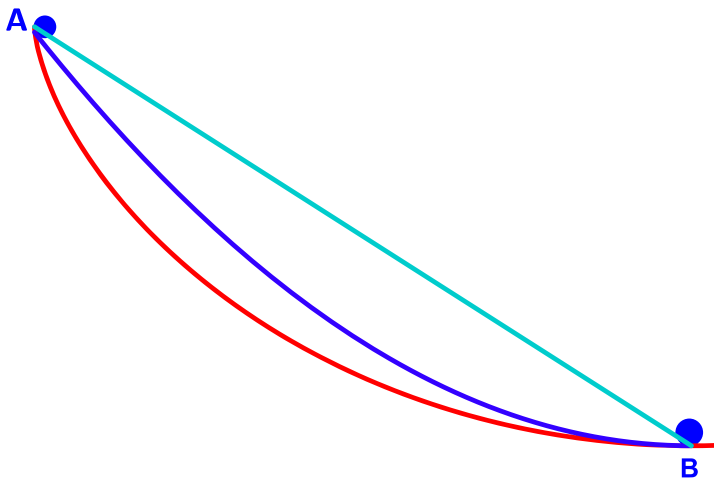


La Braquistócrona

La palabra ***Braquistócrona*** proviene del griego *Braquisto*, que significa *el más breve*, y *Chronos*, que significa *tiempo.*

El problema de la Braquistócrona fue propuesto en Junio de 1696 por el matemático suizo Johann Bernouilli, quien publicó, en una revista editada en la ciudad de Leipzig, el enunciado de uno de los retos más populares de la historia, proponiendo el desafío al resto de la comunidad matemática dándoles de plazo hasta fin de año.

La formulación del problema es como sigue: *Dados dos puntos A y B situados en un plano vertical, pero no en la misma vertical, a distinta altura ¿cuál es la curva que debe describir un móvil, bajo la accion de la gravedad y sin rozamiento, para que partiendo en reposo del punto A llegue al punto B en el tiempo más breve posible?*

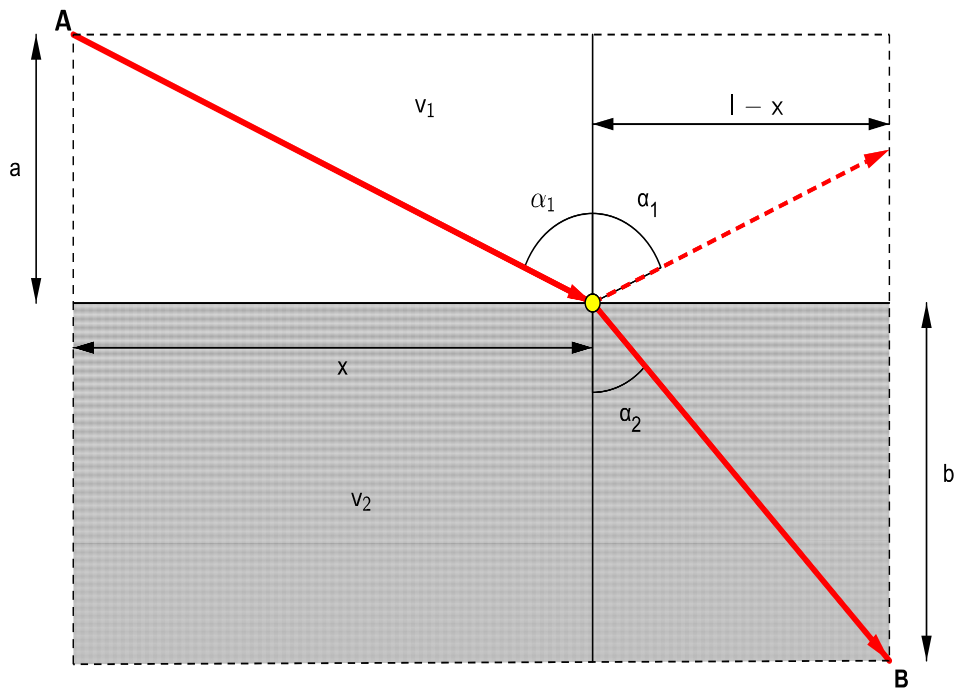


Hubo que esperar más de un año para que apareciesen cinco soluciones: una del propio Johann Bernouilli, otra de su hermano mayor Jacob Bernouilli, otra de L'Hôpital, otra de Leibniz y la de Newton, que fue el que resolvió el problema más rápidamente ya que lo hizo en una sola noche.

La solución más elegante fue propuesta por *Johann Bernouilli* (s. XVII) utilizando un viejo resultado sobre la naturaleza de la luz: *la luz se propaga siempre en línea recta*.

Sabemos que la velocidad de la luz es constante cuando viaja a través de un medio homogéneo y que su trayectoria es una línea recta, pero la trayectoria de la luz cambia cuando viaja entre dos medios distintos, por ejemplo el aire y el agua, como se aprecia cuando sumergimos una varilla recta en un recipiente transparente lleno de agua. En este caso, el rayo de luz para ir de un punto A a otro punto B no sigue el camino más corto. La clave a este problema nos la da un matemático llamado Fermat quien afirma que la luz sigue respondiendo a un principio de mínimos, de tal manera que el camino que sigue la luz es aquel en el que invierte el menor tiempo posible.

Supongamos que un haz de luz incide sobre la superficie que separa dos medios, uno en el que la velocidad de la luz es v_1 y otro en el que la velocidad de la luz es v_2. Al incidir en la superficie, parte de la luz se refleja y parte se propaga. Dados dos puntos A y B (ver figura adjunta) se trata de encontrar los ángulos α_1 y α_2 de manera que la luz viaje entre dichos puntos lo más rápidamente posible.
A través de múltiples experimentos, el holandés Snell descubrió en 1621 la ley de la refracción que lleva su nombre, que relaciona el ángulo de incidencia con el ángulo de refracción $\frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{\operatorname{sen}\alpha_2} = cte$, donde la constante depende únicamente de la densidad de los dos medios.
En 1637, Descartes la formula, sin demostrarla, de una manera más clara $\frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{\operatorname{sen}\alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}$, pero es Fermat el que proporciona la demostración definitiva utilizando el método de máximos y mínimos.



El tiempo empleado por la luz para ir desde el punto A hasta el punto B es:

$$t(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (l-x)^2}}{v_2}$$

Este tiempo queremos que sea mínimo, por lo que buscamos los valores de "x" tales que $t'(x) = 0$.

Calculamos su derivada y la igualamos a cero.

$$t'(x) = \frac{1}{v_1}\frac{2x}{2\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{1}{v_2}\frac{-2(l-x)}{2\sqrt{b^2 + (l-x)^2}} = 0$$

Teniendo en cuenta que

$$\operatorname{sen}\alpha_1 = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\alpha_2 = \frac{l-x}{\sqrt{b^2 + (l-x)^2}}$$

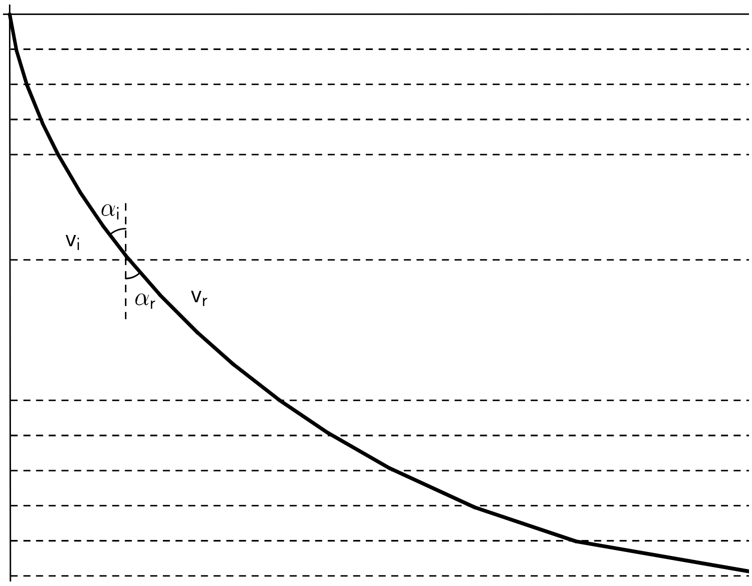
obtenemos

$$t'(x) = \frac{1}{v_1}\operatorname{sen}\alpha_1 - \frac{1}{v_2}\operatorname{sen}\alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen}\alpha_2}{v_2}$$

que es la *Ley de Snell*. Finalmente es fácil ver que $t''(x) > 0$, por lo que se trata de un mínimo.

Pero, ¿qué tiene que ver todo esto con el problema de la Braquistócrona? Aparentemente nada, pero aquí es donde Johann Bernouilli imagina una esfera cayendo por la acción de la gravedad en un medio no homogéneo, es decir, pasando de un medio a otro con densidades distintas. En este tipo de situaciones también se cumple que el camino más corto no es el más rápido.

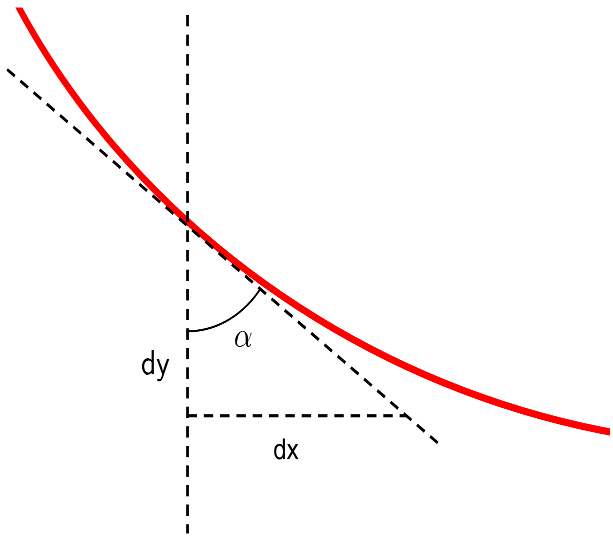
Johann Bernouilli empleó una analogía con el principio de Fermat. Se imagina el espacio dividido en láminas de densidad distinta. Dentro de cada una de las láminas la velocidad de caída de la esfera es constante, pero la densidad sufre un cambio brusco de una lámina a la siguiente y por tanto la velocidad también. En cada capa, la trayectoria será un segmento rectilíneo y la trayectoria global será una poligonal como la de la figura.



Como el tiempo recorrido ha de ser mínimo, se ha de cumplir el principio de Fermat, es decir $\frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{\operatorname{sen}\alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}$

Imaginemos que las láminas se hacen cada vez más finas y su número aumenta sin parar. La poligonal se irá aproximando a una curva, que es la curva buscada. En el desarrollo que hace del problema *Johann Bernouilli* se obtiene una ecuación diferencial cuya solución es la cicloide.

En un punto cualquiera de esta curva, la recta tangente se puede identificar con el segmento correspondiente de la poligonal, y por tanto el ángulo α que forma la tangente con la vertical en cada punto y la velocidad v en dicho punto verificarán $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{v} = \text{cte}$.



Pero la velocidad de caída en cada punto es función de la altura "y", es decir $v = \sqrt{2gy}$ por lo que se deduce que $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{2gy}} = \text{cte} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{y}} = \text{cte}$.

Para $y = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = 0$, y la tangente es vertical

Observando la figura es fácil deducir que: $\operatorname{sen}\alpha = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$

Como $\operatorname{sen}\alpha = k\sqrt{y}$ se deduce que $k\sqrt{y} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{y}\sqrt{dx^2 + dy^2}} = k$

Invirtiendo el cociente y elevando al cuadrado obtenemos la ecuación:

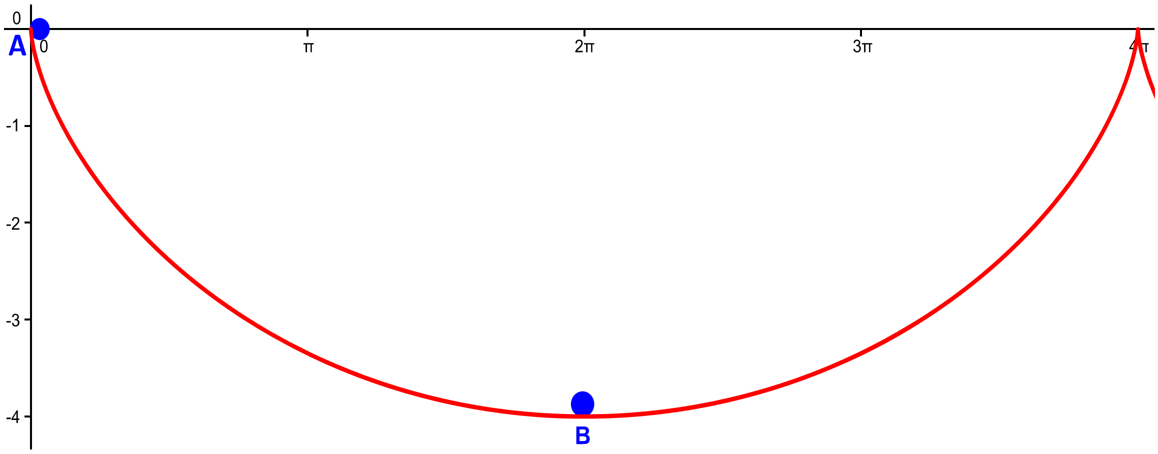
$$\left(\frac{\sqrt{y}\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}\right)^2=\frac{1}{k^2}\qquad y\left(\frac{dx^2+dy^2}{dx^2}\right)=\frac{1}{k^2}\qquad y\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)=\frac{1}{k^2}=cte$$

que corresponde a la ecuación de una cicloide.

Si estudiamos la caída libre de una bola desde un punto A hasta otro punto B estando los dos puntos situados en el mismo plano pero no en la misma vertical, la *Ley de conservación de la Energía* nos dice que la suma de las energías potencial y cinética de la bola en cada instante de la trayectoria es constante, es decir, la velocidad de llegada de la bola al punto B no depende de la trayectoria seguida. El problema que nos planteamos es: ¿es también el tiempo empleado en llegar desde A hasta B independiente de la trayectoria seguida? Es evidente que no. Sabemos que el espacio recorrido para ir desde A hasta B es mínimo si vamos en línea recta, entonces ¿cuál será la trayectoria que hay que seguir para que el tiempo empleado sea el mínimo?

La solución es que la trayectoria que hay que seguir para ir desde el punto A hasta el punto B y que el tiempo empleado sea mínimo es una cicloide invertida, siempre que solamente actúe la fuerza de la gravedad y sin ningún tipo de impulso inicial ni fuerza de rozamiento. Las ecuaciones paramétricas de la cicloide invertida son:

$$\mathbf{x=r(\alpha-sen\alpha)}\qquad \mathbf{y=r(\cos\alpha-1)}$$



El problema de la Tautócrona

La palabra ***Tautócrona*** proviene del griego *Tauto* que significa ***mismo*** y *Cronos* que significa ***tiempo***. Esta es la propiedad más sorprendente de la cicloide invertida. En 1673 Huygens descubrió un hecho sorprendente de la trayectoria de la cicloide invertida. Si una bola cae en caída libre, siguiendo una cicloide invertida desde cualquier punto a su punto más bajo, el tiempo de caída no depende del punto en que se inició el movimiento. Si dejamos caer dos bolas a lo largo de la cicloide invertida desde diferentes alturas, las bolas llegan al punto más bajo al mismo tiempo. Esto significa que si nos deslizamos por ella como si fuera un tobogán, actuando solamente la fuerza de la gravedad y sin impulsos iniciales ni fuerzas de rozamiento, el tiempo que tardaremos en llegar hasta el punto más bajo de la curva será siempre el mismo, sea cual sea el punto de la curva donde comencemos el descenso. Si empezamos en el extremo superior, se tardará lo mismo que si empezamos solo a unos pocos centímetros del punto más bajo. Esto es así *porque al ser la pendiente más inclinada en los extremos, se alcanzará mayor velocidad en un periodo de* *tiempo menor (mayor aceleración), justo al contrario que en la zona central de la curva, donde hay poco espacio que recorrer, pero no hay aceleración y por tanto iremos muy lentos.*

El péndulo Isócrono

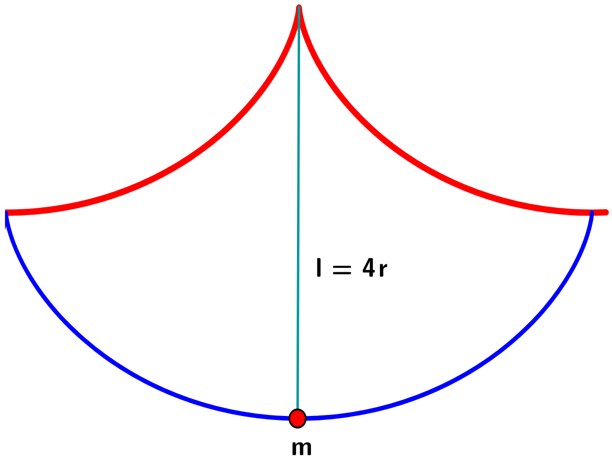
Cuando se estudia un péndulo simple es fácil probar que si las oscilaciones son pequeñas el período sólo depende de la longitud del péndulo pero no de la amplitud. Fue a Huygens a quien correspondió las primicias de este descubrimiento:

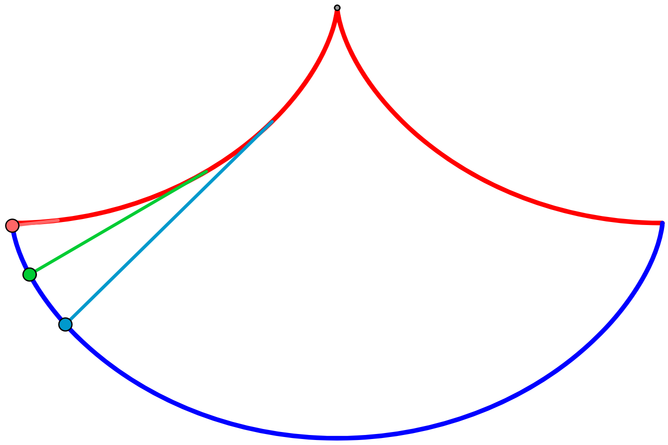
> *«El péndulo simple no puede ser considerado como una medida del tiempo segura y uniforme, porque las oscilaciones amplias tardan más tiempo que las de menor amplitud; con ayuda de la geometría he encontrado un método, hasta ahora desconocido, de suspender el péndulo; pues he investigado la curvatura de una determinada curva que se presta admirablemente para lograr la deseada uniformidad. Una vez que hube aplicado esta forma de suspensión a los relojes, su marcha se hizo tan pareja y segura, que después de numerosas experiencias sobre la tierra y sobre el agua, es indudable que estos relojes ofrecen la mayor seguridad a la astronomía y a la navegación. La línea mencionada es la misma que describe en el aire un clavo sujeto a una rueda cuando ésta avanza girando; los matemáticos la denominan cicloide, y ha sido cuidadosamente estudiada porque posee muchas otras propiedades; pero yo la he estudiado por su aplicación a la medida del tiempo ya mencionada, que descubrí mientras la estudiaba con interés puramente científico, sin sospechar el resultado.»*
>
> Christian HUYGENS: *Horologium oscillatorium* (1673)

Las oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio son rigurosamente isócronas en una trayectoria cicloidal como la anteriormente descrita, y el periodo de las oscilaciones, que es independiente de la amplitud de las mismas, viene dado por la expresión adjunta, donde r es el radio de la circunferencia que genera la cicloide. Por consiguiente, el péndulo rigurosamente isócrono deberá ser tal que la masa pendular describa una trayectoria cicloidal.

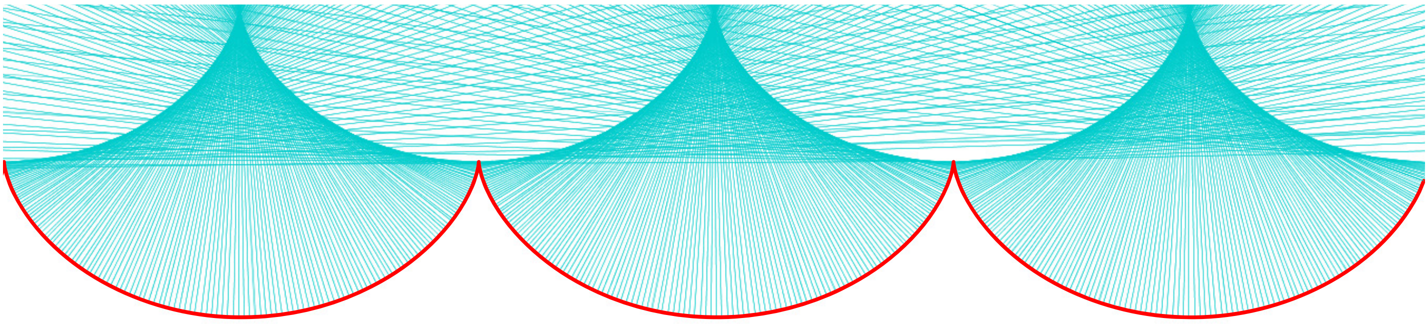
El péndulo cicloidal puede construirse (a la manera de Huygens) suspendiendo el hilo entre dos contornos sólidos que tienen la forma de arcos de cicloide tangentes en su punto de unión. Al oscilar el péndulo, el hilo se ciñe a uno u otro de esos dos contornos cicloidales, y la longitud efectiva del péndulo queda así disminuida en una proporción que depende de la amplitud de las oscilaciones. Huygens demostró que si la circunferencia que genera los dos contornos cicloidales tiene precisamente un radio que es la cuarta parte de la longitud del hilo de suspensión del péndulo ($l = 4r$) entonces la masa del péndulo describe un arco de cicloide cuya circunferencia generatriz tiene el mismo radio r. Un péndulo construido de acuerdo con estos principios es rigurosamente isócrono, y el periodo de sus oscilaciones es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$





La envolvente del haz de rectas normales a una curva (rectas perpendiculares a la curva en cada uno de sus puntos) se llama Evoluta de una curva y corresponde al lugar geométrico de sus centros de curvatura. La Evoluta de una Cicloide es otra Cicloide.



Aplicaciones prácticas

- En la actualidad la Cicloide es la curva que se utiliza en los toboganes de parques y piscinas, pistas de saltos en la nieve y pistas de patinaje (pistas de Skate) para conseguir llegar al punto más bajo en el menor tiempo.
- La Cicloide es "favorita" en la ejecución del diseño del flanco de dientes de los engranajes (tipos de perfiles de los dientes de engranajes) ya que para proyectar un juego de engranajes es necesario conocer todas las dimensiones de los mismos, así como la forma y tamaño de los dientes, para determinar con exactitud las cargas y tensiones.
- La Cicloide es la forma que ha de tener el tubo manométrico para medir la velocidad del viento en el túnel aerodinámico con sensibilidad constante para cualquier velocidad; esta misma curva, “acortada” o “alargada”, se usa para el viraje en viento.